

TD₈ – Déterminants

Exercice 1 ★

Soit x, a des réels. Parmi les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes, indiquez lesquelles sont des bases :

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (-1, 2, 0), (2, -7, -1)), \mathcal{B}_2 = ((-x, 1, 1), (1, -x, 1), (1, 1, -x)), \mathcal{B}_3 = ((1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 4, a)).$$

Exercice 2 ★★

Pour quels valeurs de $x \in \mathbb{C}$, la matrice $A - xI_3$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Exercice 3 ★★

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants (on donnera le résultat sous forme factorisée) :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & b & c \\ c & c & c \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice 4 ★★

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n .

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n .

Exercice 5 ★★★

Soit $a, b, c, x \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a \\ 1 & & 1 & a & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 ★★★★★

Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Montrer que le déterminant suivant est nul pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & P(x+3) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & P(x+n+2) & \dots & P(x+2n) \end{vmatrix}$$

Exercice 7 ★★

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $u : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{matrix}$ est linéaire, et déterminer sa matrice dans la base canonique. En déduire que $\det u = (\det A)^2$.

Exercice 8 ★★

Résoudre les systèmes suivants en discutant selon la valeur des paramètres (réels) :

$$\begin{cases} ax + y = -1 \\ x + ay = b \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$$

Exercice 9 ★★

Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois plans d'équations respectives :

$$(1-m)x - 2y + z = 0 \quad 3x - (1+m)y - 2z = 0 \quad 3x - 2y - (1+m)z = 0.$$

À quelle condition sur m ces trois plans ont-ils au moins une droite en commun ? Le cas échéant, préciser leur intersection.

Exercice 10 ★★★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. On considère la matrice définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array} \right)$, où $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Montrer que $\det \left(\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array} \right) \right) = \det(A)$.

2. Calculer la produit des matrices définies par blocs $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array} \right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array} \right)$

3. En déduire que $\det \left(\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array} \right) \right) = \det(A) \det(B)$.

4. Application : Que vaut $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$?

Exercice 11 ★★★★★

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.
2. Soit $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $C^2 + D^2 = CD$ et $CD - DC$ inversible et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que

$$(C + jD)(C + j^2D) = -j(CD - DC).$$

En conclure que n est un multiple de 3.

Exercice 12 ★★

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{i,j} = \pm 1$. Montrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Exercice 13 ★★★★★

1. Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 14 ★★★★★

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ n réels strictement positifs deux-à-deux distincts.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on pose $f_k : x \mapsto \cos(\lambda_k x)$ et $g_k : x \mapsto \sin(\lambda_k x)$

1. Montrer que les familles $(f_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(g_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont libres.
2. La famille $(f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_n, g_n)$ est-elle libre ?

Exercices issus d'oraux

Exercice 15 ★★★★★

(Oral 2011, 2018, 2019)

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 16 ★★★★★

(Oral 2012, 2013, 2017)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x+\lambda & y+\lambda & \cdots & y+\lambda \\ z+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y+\lambda \\ z+\lambda & \cdots & z+\lambda & x+\lambda \end{vmatrix}$

Exercice 17 ★★★★★

(Oral 2013, 2017)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det(M)$ en fonction de la parité de n
2. Déterminer le rang de M , une base de son noyau et de son image.

Exercice 18 ★★★★★

(Oral 2018)

On considère trois matrices A , B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AB - BA = C$ et $CB = BC$

1. Montrer que pour tout entier naturel p , $AB^{p+1} = B^p(BA + (p+1)C)$
2. Montrer que, si $\det(B)$ et $\det(C)$ sont non-nuls alors, pour tout entier naturel p , $\det(A)\det(B) = \det(C)\det(BAC^{-1} + (p+1)I_n)$
3. En déduire que B ou C n'est pas inversible.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a alors

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ainsi $\mathcal{B}_1$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$. On peut d'ailleurs remarquer que $(1, 1, 1) + 3(-1, 2, 0) + (2, -7, -1) = (0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_2) &= \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 1 & -x & 1 \\ -x & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 0 & -x-1 & 1+x \\ -x-1 & 0 & 1+x \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= -(x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2 \\ &= (x+1)^2(2-x) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $x \notin \{-1, 2\}$.

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a - 5$$

Ainsi $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 5$.

Corrigé de l'exercice 2

On a $\det(A - xI_3) = -x^3 + 12x^2 - 44x + 48 = -(x-6)(x-4)(x-2)$

Ainsi $A - xI_3$ est inversible si et seulement si $x \notin \{2, 4, 6\}$.

Corrigé de l'exercice 3

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & b & c \\ c & c & c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b-c & b-c & 0 \\ c & c & c \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ &= (a-b)(b-c)c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} && \text{Linéarité par rapport à la première colonne} \\
 &= \begin{vmatrix} a & b & c+a \\ a^2 & b^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c+a \\ a^2 & c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} b & b & c+a \\ b^2 & b^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b^2 & c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} && \text{Linéarité par rapport à la seconde colonne} \\
 &= \begin{vmatrix} a & b & c+a \\ a^2 & b^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b^2 & c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & a \\ a^2 & b^2 & a^2 \\ a^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} \\
 &\quad + \begin{vmatrix} b & c & c \\ b^2 & c^2 & c^2 \\ b^3 & c^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix} && \text{Linéarité par rapport à la troisième colonne} \\
 &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \\
 &= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

On reconnait un déterminant de Vandermonde, ainsi

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc(c-a)(c-b)(b-a)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
 &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
 &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b-a-c & 0 \\ 0 & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2cL_1 \\
 &= (a+b+c)^3
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4

1. En développant suivant la première ligne on obtient

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & & (0) \\ 0 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Puis, en développant le second déterminant obtenu selon la première colonne, on obtient $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2. $(D_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$. Cette équation a pour unique solution 1.

Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n$.

Or $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$, ainsi $\lambda = \mu = 1$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = n + 1$$

Corrigé de l'exercice 5

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a + (n-1)b & a + (n-1)b & \dots & \dots & a + (n-1)b \\ b & a & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \dots + L_n \\
 &= (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ b & a & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix} \\
 &= (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - bL_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - bL_1 \\
 &= (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}
 \end{aligned}$$

Notons $D_2 = D_{2,n}$. En développant suivant la première ligne on obtient

$$D_{2,n+2} = aD_{2,n+1} - c \begin{vmatrix} b & b & & (0) \\ 0 & a & c & \\ & b & a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & & b & a \end{vmatrix}$$

Puis, en développant le second déterminant obtenu selon la première colonne, on obtient $D_{2,n+2} = aD_{2,n+1} - cbD_{2,n}$.

$(D_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - ar + bc = 0$.

En fonction de (a, b, c) on peut ensuite déterminer une expression explicite de D_n .

D_3 est un cas particulier de D_1 pour $a = 1 + x$ et $b = 1$, ainsi $D_3 = (x + n)x^{n-1}$

Supposons n pair, $n = 2p$ alors

$$\begin{aligned}
 D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & \dots & 1 & a & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^p \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_n, C_2 \leftrightarrow C_{n-1}, \dots, C_p \leftrightarrow C_p + 1 \\
 &= (-1)^p (a + n - 1)(a - 1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

Si maintenant n est impair, $n = 2p + 1$ alors

$$\begin{aligned}
 D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & \dots & 1 & a & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^p \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_n, C_2 \leftrightarrow C_{n-1}, \dots, C_p \leftrightarrow C_p + 1 \\
 &= (-1)^p (a + n - 1)(a - 1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

Finalement $D_4 = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (a - 1)^{n-1} (a + n - 1)$

$$\begin{aligned}
 D_5 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2-n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3 - \dots - C_n \\
 &= (2-n)1^{n-1} \\
 &= 2-n
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 6

On note $D(x)$ ce déterminant.

Posons $Q_k(X) = P(X+k)$, on a alors $D(x) = \begin{vmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & Q_2(x) & \dots & Q_n(x) \\ Q_0(x+1) & Q_1(x+1) & Q_2(x+1) & \dots & Q_n(x+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Q_0(x+n) & Q_1(x+n) & Q_2(x+n) & \dots & Q_n(x+n) \end{vmatrix}$.

D'autre part, les polynômes Q_k ont tous le même degré que P donc $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Or $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est de dimension n donc cette famille est liée.

Donc l'un des Q_k est combinaison linéaire des autres :

$$\exists k \in \{0, \dots, n\}, \exists \lambda_i \in \mathbb{K}, \quad Q_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i Q_i$$

Autrement dit, la colonne k s'écrit comme combinaison linéaire des autres colonnes. donc $D(x) = 0$.

Corrigé de l'exercice 7

Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par le calcul on a $AE_{1,1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $AE_{2,1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $AE_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $AE_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Ainsi

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\det(u) = \det(\text{Mat}_B(u)) = a \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = ad \det(A) - bc \det(A) = \det(A)^2$$

Corrigé de l'exercice 8

— Le système est carré et son déterminant vaut $a^2 - 1$, il est donc de Cramer si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Dans ce cas il admet une unique solution, $\left(-\frac{a+b}{a^2-1}, \frac{ab+1}{a^2-1}\right)$ que l'on obtient par pivot de Gauss.

Si $a = 1$, le système est $\begin{cases} x+y = -1 \\ x+y = b \end{cases}$. Il n'a pas de solution si $b \neq -1$, et, si $b = -1$, l'ensemble des solutions est $\{(-1-y, y), y \in \mathbb{R}\} = (-1, 0) + \text{Vect}((-1, 1))$.

Si $a = -1$, le système le système devient $\begin{cases} x-y = 1 \\ x-y = b \end{cases}$. Il n'a pas de solution si $b \neq 1$, et si $b = 1$ l'ensemble des solutions est $\{(1+y, y), y \in \mathbb{R}\} = (1, 0) + \text{Vect}((1, 1))$.

— Le système est carré, son déterminant est un déterminant de Vandermonde, il vaut $(c-a)(c-b)(b-a)$.

* Si a, b, c sont deux à deux distincts, le système est de Cramer, par pivot de Gauss l'unique solution est donnée par $x = \frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}$, $y = \frac{(c-d)(d-a)}{(c-b)(b-a)}$, $z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$.

* Si $a = b = c$, le système n'a pas de solution dès que $d \neq a$, et, si $d = a = b = c$, alors $\mathcal{S} = \{(1-y-z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

* Si $a = b$ et $c \neq a$, on trouve par la méthode du pivot de Gauss que le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ (c-a)z = d-a \\ (c^2-a^2)z = d^2-a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z = 1 \\ (c-a)z = d-a \\ 0 = d^2-a^2 - (d-a)(c+a) = (d-a)(d-c) \end{cases}$$

Ainsi, si $d \neq a$ et $d \neq c$, le système n'a pas de solution. Si $d = a$, on trouve, comme $c \neq a$, $\mathcal{S} = \{(1-y, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$, et, si $d = c$, on trouve $\mathcal{S} = \{(-y, y, 1), y \in \mathbb{R}\}$.

* Les autres cas sont similaires au précédent en permutant les rôles de a, b, c .

— Le système, noté (S) , n'est pas carré. On applique la méthode du pivot :

$$\begin{aligned}
 (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz + t = m + 1 \\ x + my + z + t = m \\ mx + y + z + t = 1 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz + t = m + 1 \\ (m-1)y + (1-m)z = -1 \\ (1-m)y + (1-m^2)z + (1-m)t = 1 - m^2 - m \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
 &L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz + t = m + 1 \\ (m-1)y + (1-m)z = -1 \\ (1-m)(2+m)z + (1-m)t = -m(m+1) \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2
 \end{aligned}$$

On peut déjà constater que si $m = 1$, le système n'a pas de solution. Si $m \neq 1$ on trouve $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{-m}{m-1} + z, \frac{-1}{m-1} + z, z, \frac{m(m+1)}{m-1} - (m+2)z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.

Corrigé de l'exercice 9

Le système (S) formé par les trois équations est homogène, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il vaut $\{(0, 0, 0)\}$ si le système est de Cramer, et sinon c'est un sous-espace vectoriel plus grand qui contient au moins une droite. Donc les trois plans ont au moins une droite en commun si et seulement si (S) n'est pas de Cramer i.e. si et seulement si le déterminant suivant est nul.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1-m & -2 & 1 \\ 3 & -(1+m) & -2 \\ 3 & -2 & -(1+m) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-m & -2 & 1 \\ 3 & -(1+m) & -2 \\ 0 & -1+m & 1-m \end{vmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 &= (1-m) \begin{vmatrix} 1-m & -2 & 1 \\ 3 & -(1+m) & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (1-m) \begin{vmatrix} 1-m & -1 & 1 \\ 3 & -3-m & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\
 &= (1-m)(m^2 + m) = (1-m)m(m+2)
 \end{aligned}$$

Ainsi les trois plans ont une droite commune si et seulement si $m \in \{0, 1, -2\}$.

- Si $m = 0$, on trouve en résolvant (S) que l'intersection est la droite $\text{Vect}((1, 1, 1))$.
- Si $m = 1$, on trouve en résolvant (S) que l'intersection est la droite $\text{Vect}((2, 1, 2))$.
- Si $m = -2$, on trouve en résolvant (S) que l'intersection est la droite $\text{Vect}((1, 3, 3))$.

Corrigé de l'exercice 10

1. On va procéder par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Pour $p = 0$ le résultat à prouver est $\det(A) = \det(A)$ ce qui est clairement vrai.

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ on suppose le résultat vrai au rang $p-1$.

Par développement par rapport à la dernière ligne on a

$$\left| \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array} \right| = (-1)^{2n} \left| \begin{array}{c|c} A & C' \\ \hline 0_{p,n} & I_{p-1} \end{array} \right|$$

où C' est la matrice obtenue en retirant la dernière colonne de C .

Par hypothèse de récurrence $\left| \begin{array}{c|c} A & C' \\ \hline 0_{p,n} & I_{p-1} \end{array} \right| = \det(A)$, ainsi $\left| \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array} \right| = \det(A)$, ce qui prouve la propriété au rang p et achève la récurrence.

2. Il s'agit d'une simple produit par blocs, comme les tailles sont compatibles on a

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n A + 0_{n,p} 0_{p,n} & I_n C + 0_{n,p} I_p \\ \hline 0_{p,n} A + B 0_{p,n} & 0_{p,n} C + B I_p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array} \right)$$

3. Par multiplicativité du déterminant on a

$$\det \left(\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array} \right) \right) = \det \left(\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array} \right) \right) \det \left(\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array} \right) \right)$$

Or $\det \left(\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & I_p \end{array} \right) \right) = \det(A)$ et, de manière similaire, $\det \left(\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array} \right) \right) = \det(B)$.

Finalement on a bien $\det \left(\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{p,n} & B \end{array} \right) \right) = \det(A) \det(B)$

4. D'après le résultat précédent on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (4-6)(40-42) = 4$$

Corrigé de l'exercice 11

- On a $\det(B^2) = \det(B)^2$ et $\det(-I_n) = (-1)^n$. Ainsi $(-1)^n = \det(B)^2 \geq 0$. n est donc pair.
- On sait que $j^3 = -1$ et $1 + j + j^2 = 0$

$$\begin{aligned} (C + jD)(C + j^2D) &= C^2 + jDC + j^2CD + j^3D^2 \\ &= C^2 + D^2 + jDC + j^2CD \\ &= (1 + j^2)CD + jDC \\ &= -jCD + jDC \\ &= -j(CD - DC) \end{aligned}$$

En passant au déterminant on obtient $(-j)^n \det(CD - DC) = \det(C + jD) \det(C + j^2D)$, d'où, comme $CD - DC$ est inversible, $(-j)^n = \frac{\det(C + jD) \det(C + j^2D)}{\det(CD - DC)}$

Or $\bar{j} = j^2$, ainsi, comme C et D sont à coefficients réels on a $\overline{C + jD} = C + j^2D$, d'où d'après l'exercice 13, $\det(C + jD) = \det(C + j^2D)$.

On a alors

$$(-j)^n = \frac{\det(C + jD) \det(C + j^2D)}{\det(CD - DC)} = \frac{|\det(C + jD)|^2}{\det(CD - DC)} \in \mathbb{R}$$

Or $(-j)^n = \exp\left(\frac{-in\pi}{3}\right)$ donc $(-j)^n \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{-n\pi}{3}$ est congru à 0 modulo π donc si et seulement n est un multiple de 3.

Corrigé de l'exercice 12

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n + L_1$ dans le calcul de $\det(A)$

Pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, les coefficients de la (nouvelle) ligne i sont de la forme $a_{i,j} + a_{1,j} \in \{-2, 0, 2\}$. En particulier ils sont tous multiples de 2.

On factorise alors 2 dans chaque ligne à partir de la deuxième, on obtient $\det(A) = 2^{n-1} \det(B)$ où B est la matrice obtenue par les opérations sus-mentionnées. En particulier B est à coefficients entiers.

On peut montrer par récurrence via des développements successifs par rapport à des lignes que, si M est à coefficients entiers alors $\det(M) \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\det(B) \in \mathbb{Z}$ et donc $\det(A)$ est bien un multiple de 2^{n-1} .

Corrigé de l'exercice 13

1. On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation

Le résultat est évident pour $n = 1$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, on note $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de A et $A_{i,j}$ le mineur d'indice (i,j) de A . $\overline{A}$ est alors la matrice de coefficients $(\overline{a_{i,j}})_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2}$ et, pour $(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ son mineur d'indice (i,j) est $\overline{A_{i,j}}$.

Par développement par rapport à la première colonne on a $\det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1})$.

D'où

$$\overline{\det(A)} = \overline{\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1})} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \overline{a_{i,1}} \overline{\det(A_{i,1})}$$

Or, par hypothèse de récurrence, puisque $A_{i,1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\overline{\det(A_{i,1})} = \det(\overline{A_{i,1}})$.

Ainsi

$$\overline{\det(A)} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \overline{a_{i,1}} \det(\overline{A_{i,1}})$$

En procédant également à un développement par rapport à la première colonne on a $\det(\overline{A}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \overline{a_{i,1}} \det(\overline{A_{i,1}})$.

Finalement on a bien $\overline{\det(A)} = \det(\overline{A})$.

2. Comme A et B commutent on a $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ ainsi

$$\det(A^2 + B^2) = \det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A + iB) \overline{\det(A - iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$$

Corrigé de l'exercice 14

1. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

En évaluant en 0 on a alors $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$.

On dérive deux fois la relation $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, on a alors $-\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^2 f_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

De nouveau en évaluant en 0 on obtient $\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^2 = 0$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, en dérivant $2p$ fois la relation $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, on obtient $(-1)^p \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^{2p} f_k =$

$0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$. D'où, en évaluant en 0 $\sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^{2p} = 0$.

Le n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ est alors solution du système

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= 0 \\ \lambda_1^2 \alpha_1 + \lambda_2^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n^2 \alpha_n &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ \lambda_1^{2n-2} \alpha_1 + \lambda_2^{2n-2} \alpha_2 + \dots + \lambda_n^{2n-2} \alpha_n &= 0 \end{cases}.$$

La matrice associée à ce système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_1^2)^{n-1} & (\lambda_2^2)^{n-1} & \dots & (\lambda_n^2)^{n-1} \end{pmatrix}$, son déterminant

est le déterminant de Vandermonde $V(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$.

Comme les $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont strictement positifs et deux-à-deux disjoints alors les $(\lambda_i^2)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont deux-à-deux disjoints. Ainsi $V(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) \neq 0$.

La système obtenu est donc de Cramer, il admet une unique solution qui est ici $(0, \dots, 0)$.

On a donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. La famille $(f_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est donc libre.

Soit maintenant $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \beta_k g_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

En dérivant on obtient $\sum_{k=1}^n \beta_k \lambda_k f_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

Par liberté de la famille $(f_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ on en déduit que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k \beta_k = 0$, comme $\lambda_k > 0$ on a donc $\beta_k = 0$.

Finalement la famille $(g_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre.

- La famille $(f_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille libre du sous espace vectoriel des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la famille $(g_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille libre du sous espace vectoriel des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On sait que le sous espace vectoriel des fonctions paires et le sous espace vectoriel des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ainsi la réunion d'une famille libre du sous espace vectoriel des fonctions paires et d'une famille libre du sous espace vectoriel des fonctions impaires est encore une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Finalement la famille $(f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_n, g_n)$ est libre.

Corrigé de l'exercice 15

- On procède par récurrence sur n .

Initialisation

Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1$$

L'égalité recherchée est donc vérifiée au rang $n = 1$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons notre égalité vérifiée au rang n . On a ainsi

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=0}^n k^2 \\
 &= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= (n+1) \left(n+1 + \frac{n(2n+1)}{6} \right) \\
 &= (n+1) \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{2} \right) \\
 &= (n+1) \left(\frac{(2n+3)(n+2)}{6} \right) \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
 \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité au rang $n+1$.

On a donc prouvé par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Soit $n \geq 2$.

Par développement par rapport à la première ligne on a

$$D_n = D_{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & n-2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & \vdots \end{vmatrix}$$

Puis en développant le second déterminant par rapport à la première colonne

$$D_n = D_{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1)(-1)^n(n-1) \det(I_{n-2}) = D_{n-1} - (n-1)^2$$

On en déduit par une récurrence aisée que

$$\forall n \geq 2, \quad D_n = D_1 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Or $D_1 = 1$, Ainsi

$$\forall n \geq 2, \quad D_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(2-n)(2n^2+n+3)}{6}$$

Corrigé de l'exercice 16

Si $y = z$ on retrouve le premier déterminant de l'exercice 5., ainsi

$$\begin{vmatrix} x+\lambda & y+\lambda & \cdots & y+\lambda \\ y+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y+\lambda \\ y+\lambda & \cdots & y+\lambda & x+\lambda \end{vmatrix} = (x + (n-1)y + n\lambda)(x-y)^{n-1}$$

Supposons maintenant $y \neq z$. Soit $f : \lambda \mapsto$

$$\begin{vmatrix} x+\lambda & y+\lambda & \cdots & y+\lambda \\ z+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y+\lambda \\ z+\lambda & \cdots & z+\lambda & x+\lambda \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$ on obtient

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} x+\lambda & y-x & \cdots & \cdots & y-x \\ z+\lambda & x-z & y-z & \cdots & y-z \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & y-z \\ z+\lambda & 0 & \cdots & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

Un développement par rapport à la première colonne nous permet alors de montrer que f est une fonction affine.

Il existe ainsi $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda) = a\lambda + b$$

$$\text{Or } f(-y) = \begin{vmatrix} x-y & 0 & \cdots & 0 \\ z-y & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ z-y & \cdots & z-y & x-y \end{vmatrix} = (x-y)^n \text{ et } f(-z) = (x-z)^n.$$

$$\text{On a ainsi } \begin{cases} -ay + b = (x-y)^n \\ -az + b = (x-z)^n \end{cases} = (x-y)^n, \text{ d'où } a = \frac{(x-y)^n - (x-z)^n}{z-y} \text{ et } b = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}.$$

Finalement

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda) = \frac{((x-y)^n - (x-z)^n)\lambda + z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$$

Corrigé de l'exercice 17

1. Notons $D_n = \det(M)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par développement par rapport à la première colonne on a

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \end{vmatrix} = 1^n + (-1)^{n+1} 1^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

2. Si n est impair alors M est de rang n , son noyau est $\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ et son image est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si n est pair alors M n'est pas inversible, donc $\text{Rang } M < n$.

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M . On sait que $\text{Rang } M = \text{Rang}(C_1, \dots, C_n) \leq n-1$.

$$\text{Or } \text{Rang}(C_2, \dots, C_n) = \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = n-1.$$

Ainsi $\text{Rang}(C_1, \dots, C_n) \geq \text{Rang}(C_2, \dots, C_n) \geq n-1$.

On a donc $\text{Rang}(M) = n-1$. De plus $(c_2, \dots, C_n)$ est une base de $\text{Im}(M)$.

Le théorème du rang nous assure que $\dim(\text{Ker}(M)) = 1$, pour trouver une base de $\text{Ker}(M)$ il nous suffit alors de trouver un vecteur non-nul de $\text{Ker}(M)$.

Soit $X = (1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \cdots \quad 1 \quad -1)$. On a alors $MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, d'où $X \in \text{Ker}(M)$.

X est un vecteur non-nul, il forme donc une famille libre de cardinal 1 de $\text{Ker}(M)$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Ainsi $X = (1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad \cdots \quad 1 \quad -1)$ est une base $\text{Ker}(M)$.

Bases

Le singleton $\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ n'a pas de base et n'impose quelle base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fonctionnera pour l'image. En pratique ce n'est pas ce cas qui intéresse l'examineur mais le cas où M n'est pas inversible.

Corrigé de l'exercice 18

1. On procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Pour $p = 0$ on a $AB^{p+1} = AB$ et $B^p(BA + (p+1)C) = I_n(BA + C) = BA + AB - BA = AB$.

La propriété est donc vraie pour $p = 0$.

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $AB^{p+1} = B^p(BA + (p+1)C)$. Alors

$$\begin{aligned} AB^{p+2} &= AB^{p+1}B \\ &= B^p(BA + (p+1)C)B \\ &= B^p(BAB + (p+1)CB) \\ &= B^p(BAB + (p+1)BC) \\ &= B^{p+1}(AB + (p+1)C) \\ &= B^{p+1}(AB + BA - AB + (p+1)C) \\ &= B^{p+1}(BA + C + (p+1)C) \\ &= B^{p+1}(BA + (p+2)C) \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.

2. Supposons que $\det(B)$ et $\det(C)$ sont non-nuls

Pour $p \in \mathbb{N}$ on a, d'après la question précédente,

$$\det(A) \det(B)^{p+1} = \det(B)^p \det(BA + (p+1)C)$$

D'où

$$\det(B)^p (\det(A) \det(B) - \det(BA + (p+1)C)) = 0$$

Or $\det(B) \neq 0$, donc $\det(A) \det(B) = \det(BA + (p+1)C)$

Comme $\det(C) \neq 0$, C est inversible et donc $\det(BA + (p+1)C) = \det(C) \det(BAC^{-1} + (p+1)I_n)$.

On a donc bien

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \det(A) \det(B) = \det(C) \det(BAC^{-1} + (p+1)I_n)$$

3. Soit $P : x \mapsto \det(BAC^{-1} + xI_n)$.

On peut montrer par développements successifs par rapport aux colonnes et/ou aux lignes que P est une fonction polynomiale de degré n .

D'après la question précédente on a, si $\det(B) \neq 0$ et $\det(C) \neq 0$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(k) = \frac{\det(A) \det(B)}{\det(C)}$$

$P - \frac{\det(A) \det(B)}{\det(C)}$ est donc une fonction polynomiale admettant une infinité de racines, c'est donc la fonction nulle. Ainsi P est une fonction polynomiale constante.

Or P est une fonction polynomiale de degré n . On aboutit ainsi à une contradiction.

Ainsi $\det(B) = 0$ ou $\det(C) = 0$.

Polynôme caractéristique

On verra un peu plus tard que P est le polynôme caractéristique de $-BAC^{-1}$